/ /

وفي هذه الحالة يكون المنحني L منحنياً بسيطاً معادلاته الوسيطية :

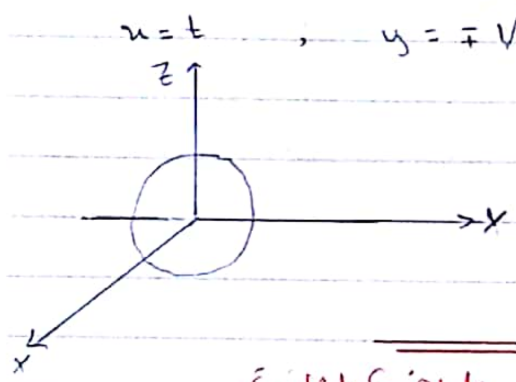
$$x = t \quad , \quad y = \phi^{-1}(t) \quad , \quad z = \phi^{-1}(t)$$

مثال : المنحني الناتج عن تقاطع الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

مع الاسطوانة $x^2 + y^2 - ax = 0$

إذا فرضنا $x = t$ فتكون المعادلات الوسيطية لمنحني مثنان هي :

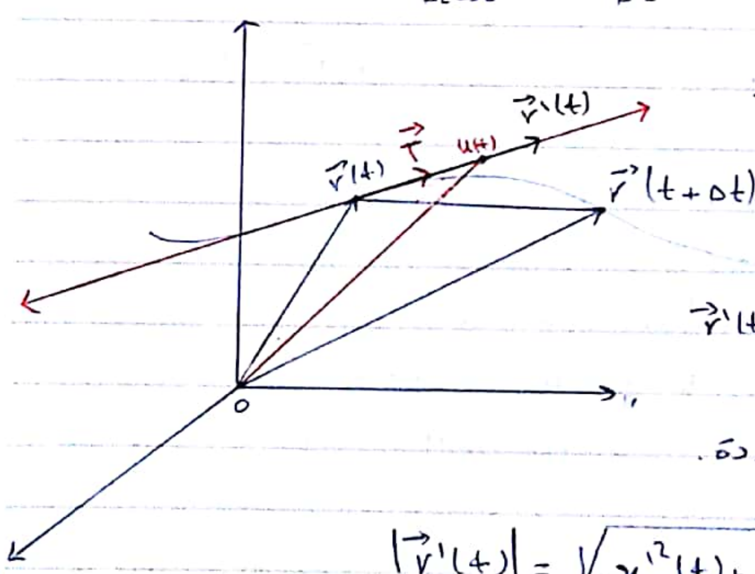
$$x = t \quad , \quad y = \mp\sqrt{at - t^2} \quad , \quad z = \mp\sqrt{a^2 - at}$$



الأحد 8 / 10 / 2017 المحاضرة الثانية

المتجه المماس لمنحنٍ : ليكن $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ منحنٍ في الفضاء الثلاثي IR^3 . نسمي المتجه

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



متجه المماس للمنحني $\vec{r}(t)$ في النقطة الموافقة للوسيط t ، ورأينا بالشكل .

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

ويعرف بمشتقة متجه الموضع للدالة $\vec{r}(t)$ في النقطة الموافقة للوسيط t

• ويبرهن أن الشرط والكافي كي تكون $\vec{r}'(t)$ موجودة هو أن تكون الدوال $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ موجودة .

نسمي العدد الموجب :

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

طويلة متجه المماس

/ /

ونسمي المتجه $\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ متجه واحدة المماس للمنحنى في النقطة t ونرمز له بـ $\vec{T}$

أي $\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

المستقيم المماس لمنحنى: المستقيم المماس لمنحنى L في نقطة ما منه الموافقة للوسيط t هو الخط المار من تلك النقطة والذي يحاذي متجه المماس للمنحنى في تلك النقطة $\vec{r}'(t)$.

ونفرض $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ عندئذ تكون المعادلة المتجهة للخط المماس هي:

$$\left(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\right) = \lambda\, \vec{r}'(t_0)$$

والمعادلة التحليلية هي:

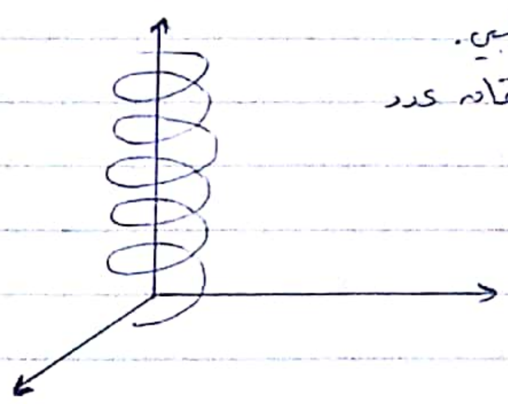
$$\frac{x(t)-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y(t)-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z(t)-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

المنحنى النظامي: ليكن L منحنياً معرفاً بالدالة المتجهة $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ حيث $t \in]\alpha, \beta[$ ، نقول أن المنحنى نظامي من المرتبة n ونكتب $\vec{r}(t) \in C^n$ إذا كانت الدالة $\vec{r}'(t) \neq 0$ لكل $t \in]\alpha, \beta[$

← المشتقة الأولى فقط لا تساوي الصفر.

← صف الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق من الرتبة n

مثال: ليكن المنحنى المعطى بالدالة $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$; $t \in \mathbb{R}$ و $a, b > 0$ والمعروف بالمنحنى اللولبي.



نلاحظ أن $\vec{r}(t) \in C^{\infty}$ (قابلة للاشتقاق عدد كيفي من المرات) ، وأيضاً:

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \neq 0$$

وذلك $\forall\, t \in \mathbb{R}$

وبالتالي المنحنى نظامي.

/ /

النقطة العادية و النقطة الشاذة لمنحني :

ليكن $L \equiv \vec{r}(t)$ منحنياً معطىً بالدالة المتجهة $\vec{r}(t)$. نقول عن النقطة M الموافقة للوسيط t_0 إنها عادية إذا كان $\vec{r}'(t_0) \neq 0$.
في هذه الحالة ، المنحني الغالب جميع نقاطه عادية.
ونقول عن M إنها شاذة إذا كان $\vec{r}'(t_0) = 0$

طول قوس منحني : ليكن $L \equiv \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ منحنياً معرفاً على المجال $]\alpha, \beta[$. إن طول قوس المنحني L الواقع بين النقطتين α, β يعطى :

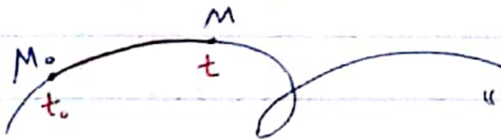
$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

مثال : لنوجد طول منحني اللولب الدائري الواصل بين النقطتين الموافقتين لقيمتي الوسيط $t=0$ ، $t=2\pi$:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

الوسيط الطبيعي (طول القوس) :

ليكن L منحنياً معرفاً بدلالة الوسيط t بالدالة $\vec{r}(t) ;\ t \in]\alpha, \beta[$
ولتكن $M_0 = r(t_0)$ نقطة مثبتة منه ، ولتكن M نقطة متحولة منه موافقة للوسيط t .
نسمي بالتعريف طول قوس المنحني L الواصل بين M_0 , M الوسيط الطبيعي (طول القوس) ونرمز له بـ S .



«طول القوس بين نقطتين إحداهما مثبتة والأخرى متغيرة»
ونلاحظ أن S يعطى بالدستور :

$$S = S(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(\tau)|\, d\tau$$

نلاحظ من الأخيرة أن : $\boxed{S'(t) = |\vec{r}'(t)|}$ **مهم**

/ /

نتيجة هامة: إذا كان L منحنياً نظامياً ($|\vec{r}'(t)| \neq 0$) عندئذٍ توجد الدالة العكسية $t = t(s)$ (الدالة العكسية للدالة $s(t)$) . ويكون:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|}$$

ومنه:

$$|\vec{r}'(s)| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| = |\vec{r}'(t)| \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} = 1$$

نلاحظ أن طويلة مشتقة متجه الموضع للمنحني بالنسبة للوسيط الطبيعي s تساوي الواحد.
أي أن $\vec{r}'(s)$ هو متجه واحدة محاذٍ منحنٍ $\vec{r}'(t)$ ، لذلك ندعوه متجه واحدة المماس المنحني L . ونكتب:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'(s) \quad , \quad |\vec{T}| = 1$$

ملاحظة هامة: سنرمز للمشتقة بالنسبة للوسيط العادي t بالرمز $(')$. وللمشتقة بالنسبة للوسيط الطبيعي بـ $(\cdot)$ ، وبذلك يكون:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

مثال: ليكن المنحني $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$

لدينا $|\vec{r}'(t)| = a \neq 0$ ، بذلك يمكننا إيجاد الوسيط الطبيعي s:

$$s(t) = \int_0^t a\,dt = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

وبذلك يمكننا كتابة معادلة المنحني بدلالة الوسيط الطبيعي على النحو:

$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\frac{s}{a} , a\sin\frac{s}{a} , 0\right)$$

مثال 2: المنحني المعطى بالمعادلة $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, 0)$

$$\vec{r}'(t) = (1, t, 0) \Rightarrow |\vec{r}'(t)| = \sqrt{1+t^2}$$

تكامل بنظير $S(t) = \int_0^t \sqrt{1+\tau^2}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]$

* هل يمكننا إيجاد $t = t(s)$ بسهولة ؟! لا ، لا يمكن.

المستوي المماس لمنحنٍ: ليكن L منحنياً معطىً بالدالة المتجهة $\vec{r} = \vec{r}(t)$ و L منحنياً نظامياً.

وإذا كان $\vec{r}'(t)$ و $\vec{r}''(t)$ غير متوازيين

عندئذٍ نسمي المستوي المحدد بالمتجهين $\vec{r}''(t_0)$ ، $\vec{r}'(t_0)$ المستوي المماس للمنحني L في النقطة $M(t_0)$.

نعتبر M نقطة متحولة من المستوي المماس و $\vec{r}(t)$ متجه موضعها ،

عندئذٍ تكون المعادلة المتجهة للمستوي المماس هي:

$$\left[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\right]\cdot\left[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t_0)\right] = 0$$

والمعادلة التحليلية للمستوي المماس هي:

$$\begin{vmatrix} x(t)-x(t_0) & y(t)-y(t_0) & z(t)-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

المستقيم الناظم والمستقيم ثنائي الناظم على منحنٍ:

ليكن L منحنياً نظامياً معطىً بالدالة $\vec{r} = \vec{r}(t)$. نسمي أي خط يمر من النقطة $M_0 = M(t_0)$ ويعامد المستقيم المماس للمنحني في $M(t_0)$ بالمستقيم الناظم وعددها غير محدود . والآن نسمي المستقيم الناظم الواقع في المستوي المماس بالمستقيم الناظم الأساسي . ونسمي متجه الواحدة له بتجه واحدة الناظم الأساسي ونرمز له بـ $\vec{N}$.

نسمي المستقيم المار من $M(t_0)$ والعمودي على المستوي المماس للمنحني في $M(t_0)$

/ /

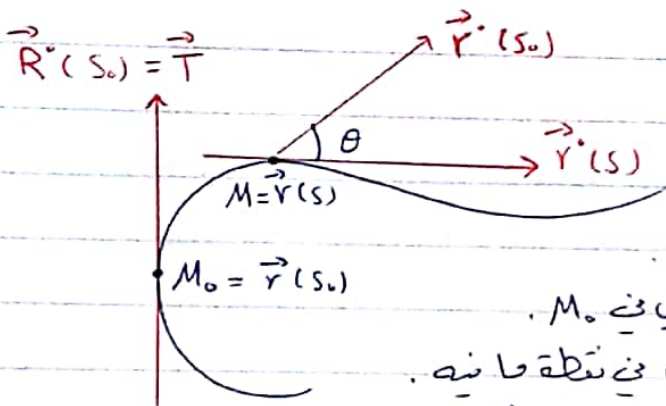
بثنائي الناظم ونرمز لمتجه واحدته ب $\vec{B}$.

تشكل المستقيمات الثلاثة (المماس - الناظم الأساسي - ثنائي الناظم) ثلاث مستويات متعامدة، وهي:

1- المستوي المماس ويحوي $\vec{T}$, $\vec{N}$ ويعامد $\vec{B}$ ، معادلته:
$$[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)] . \vec{B} = 0$$
"أو شكل المحدد"

2- المستوي الناظم ويحوي $\vec{N}$, $\vec{B}$ ويعامد $\vec{T}$ ، معادلته:
$$[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)] . \vec{T} = 0$$

3- المستوي المقوّم ويحوي $\vec{T}$, $\vec{B}$ ويعامد $\vec{N}$ ، معادلته:
$$[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)] . \vec{N} = 0$$



تقوس منحني:

ليكن L منحنياً معطى بدلالة الوسيط الطبيعي S : $\vec{r} = \vec{r}(S)$

وليكن $\vec{r}(S_0)$ متجه الموضع للنقطة M_0 .

و $\dot{\vec{r}}(S_0)$ متجه واحدة المماس للمنحني في M_0 .

و $\dot{\vec{r}}(S)$ متجه واحدة المماس للمنحني في نقطة ما منه.

و θ هي الزاوية بين المتجهين $\dot{\vec{r}}(S)$, $\dot{\vec{r}}(S_0)$.

نسمي النهاية $\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\theta}{\Delta S}$ تقوس المنحني L في النقطة M_0 .
ونرمز له ب K .

مبرهنة: تقوس المنحني L يعطى بدلالة الوسيطين العادي والطبيعي بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب:

$$K(t) = \frac{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} \quad , \quad K(S) = |\ddot{\vec{r}}(S)|$$

ملاحظة: إذا كان تقوس المنحني غير معدوم $(K \neq 0)$ فإننا نسمي مقلوبه نصف قطر تقوس المنحني، ونرمز له ب ρ ، أي $\rho = \frac{1}{K}$

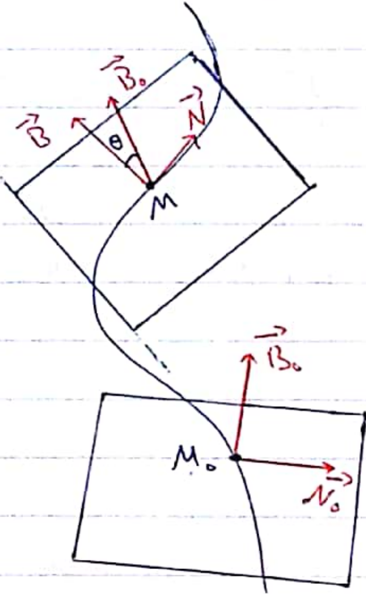
"الخط المستقيم هو دائرة نصف قطر تقوسها هو لا نهاية"

/ /

مثال: احسب تقوس المنحني $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$

$\Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{a}$

«يوجد أمثلة وتمارين في الكتاب»



التفاف منحني: ليكن L منحنياً معطى بدلالة الوسيط الطبيعي S، ولتكن M_0 نقطة ما منه.

و $\vec{B}_0$ شعاع الناظم في تلك النقطة.

و $\vec{B}$ شعاع الناظم في نقطة ما M من المنحني.

و θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{B}_0$ وهي الزاوية ذاتها بين المستويين المماسين للمنحني في M_0 و M على الترتيب.

تسمى النهاية $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\theta}{\Delta S} = \tau(S)$ بالتفاف المنحني.

ونرمز له بـ $\tau(S)$.

ويعطى بإحدى العلاقتين:

$$\tau(S) = \frac{(\vec{r}^{\cdot}(S_0), \vec{r}^{\cdot\cdot}(S_0), \vec{r}^{\cdot\cdot\cdot}(S_0))}{|\vec{r}^{\cdot\cdot}(S_0)|^2}$$

شرح طلوب برهان المرحلة

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0), \vec{r}'''(t_0))}{[\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)]^2}$$

مثال: أوجد تقوس والتفاف منحني اللولب الدائري.

$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

«إذا لم يعطنا النقطة فلها شكل عام»